

MATEMATIKA „A”
12. évfolyam

**Ismétlő, rendszerező modul
az emelt szintű érettségire készülőknek**

Algebrai és transzcendens számok

Készítette:
Klement András

2010

Bevezetés

Ebben a modulban áttekintjük a számhalmazokat és új szempont szerint csoportosítjuk azokat algebrai, ill. transzcendens számokra.

Külön foglalkozunk a két legnevezetesebb transzcendens számmal, a π -vel és az e -vel. Levezetünk egy nagyon szép közelítést π -re a körbe írt szabályos $2n$ oldalú sokszög kerületének kiszámításával. A Buffon-féle tűprobléma néven híressé vált módszerrel, kísérletileg is meghatározzuk π értéket. Ehhez szemléltetésül segítségül hívunk egy szimulációs programot is. Foglalkozunk továbbá a matematika egyik leghíresebb problémájával, a kör négyszögesítésével is.

I. Számhalmazok

Tekintsük át a számfogalom kialakulását és fejlődését!

Véges halmazok számosságai alkotják a természetes számokat. Az üres halmaz számossága 0, az egyetlen elemet tartalmazó halmazé 1. Két halmaz számossága azonos, ha a halmazok elemei között kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést tudunk létesíteni. A természetes számok halmaza $\mathbf{N}$. Számosságát megszámlálhatóan végtelennek nevezzük.

1. Feladat. Igaz-e, hogy ha az $\mathbf{A}$ halmaz valódi részhalmaza $\mathbf{B}$ -nek, akkor kisebb a számossága?

A természetes számok halmazában nem oldható meg az $x+a=0$ egyenlet, ezért bevezették a negatív számokat. Együttesen az egész számok halmazát alkotják, jele $\mathbf{Z}$. Itt sem oldható meg azonban az $x \cdot a=1$ egyenlet, így bevezették a racionális számokat is.

Definíció: Az a számot racionális számnak nevezzük, ha felírható két egész szám hányadosaként. A racionális számok halmazának jele $\mathbf{Q}$. $\mathbf{Q}$ már zárt az összeadásra és a szorzásra nézve, s mindkét műveletre nézve bármely 0-tól kü-

lönböző racionális számnak van $\mathbf{Q}$ -ban inverze az egységelemekre nézve: $-a$, ill. $\frac{1}{a}$. Ebből következik, hogy $\mathbf{Q}$ a kivonásra és az osztásra nézve is zárt.

Az összeadás és a szorzás is kommutatív, asszociatív művelet, és a szorzás az összeadásra nézve disztributív.

Tétel: A racionális számok halmaza azonos a véges és a végtelen szakaszos tizedes törtek halmazával.

Bizonyítás:

1. Minden racionális szám véges vagy végtelen szakaszos tizedes tört alakba írható.

Az osztási maradék kisebb a nevezőnél, így véges számú lépés után 0 lesz vagy ismétlődés kezdődik.

2. Minden véges és a végtelen szakaszos tizedes tört racionális szám.

A végtelen mértani sor összegképlete racionális számokat tartalmaz, $\mathbf{Q}$ pedig zárt az összeadásra, szorzásra, kivonásra és osztásra is.

2. Feladat. Írd fel két egész szám hányadosaként a $0,23456565656\dots$ végtelen vegyes szakaszos tizedes törtet!

A végtelen, nem szakaszos tizedes törtek nem racionális számok. Ezeket irracionális számoknak nevezzük. A racionális és irracionális számok együtt alkotják a valós számok halmazát. Jele $\mathbf{R}$.

Cantor bizonyította, hogy $\mathbf{Q}$ megszámlálhatóan végtelen, viszont $\mathbf{R}$ nem az, tehát nagyobb számosságú, amit kontinuum számosságnak nevezünk.

Gyűjtőmunka: Nézz utána a könyvtárban vagy az interneten, hogyan bizonyíthatók be a fenti tételek.

3. Feladat: Keress irracionális számokat!

4. Feladat: Mutassuk meg, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális szám!

A matematika két leghíresebb száma, az e és a π is irracionális.

Felsőbb matematikai eszközökkel bizonyítható, hogy a $\sin x$ és $\cos x$ függvények az $x=0$ kivételével minden racionális helyen irracionális értéket vesznek fel, így pl. $\sin 2$ irracionális.

5. Feladat: Döntsd el az alábbi számokról, hogy racionálisak vagy irracionálisak:

$$a = \sin \pi, \quad b = \log_2 9, \quad c = \lg \frac{1}{\sqrt[5]{100}}, \quad d = \sqrt{2}^{\log_2 9}$$

II. Algebrai és transzcendens számok

A racionális számok halmazában nem oldható meg az $x^2 - a = 0$ egyenlet.

Ezért vált szükségessé a számfogalom további bővítése, az algebrai számok értelmezése a racionális számok halmazának lehetséges kiterjesztéseként.

Definíció: Az a számot algebrai számnak nevezzük, ha létezik olyan racionális együtthatós, legalább elsőfokú polinom, melynek az a szám gyöke.

Az algebrai számok halmazának jele: A

6. Feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha a algebrai szám, akkor létezik olyan egész együtthatós, legalább elsőfokú polinom is, melynek az a szám gyöke.

7. Feladat: Igazoljuk, hogy minden racionális szám algebrai szám!

8. Feladat: Mutassuk meg, hogy az $a = \sqrt[3]{5}\sqrt{2}\sqrt[5]{7}$ és $b = \sqrt{3 + \sqrt[5]{2}}$ irracionális számok is algebrai számok!

Bizonyítható, hogy bármely két nullától különböző algebrai szám összege, különbsége, szorzata és hányadosa is algebrai szám.

Látható, hogy minden racionális számokból álló gyökkifejezés algebrai szám. Fordítva viszont nem igaz. **Galois** bizonyította be, hogy van olyan ötödfokú polinom, melynek nincs megoldó képlete, azaz a gyökei nem adhatók meg gyökkifejezés segítségével. Ilyen pl. az $x^5 - 4x - 2$ polinom is.

Cantor bizonyította be 1874-ben, hogy az algebrai számok halmaza, ugyanúgy, mint a természetes és a racionális számok halmaza, szintén csak megszámlálhatóan végtelen. Ez bizonyítja, hogy vannak nem algebrai számok is, ezeket transzcendens számoknak nevezzük. Az elnevezés **Eulertől** származik, és az a magyarázata, hogy „ezek a számok túlhaladják az algebrai módszerek teljesítő-képességét”.

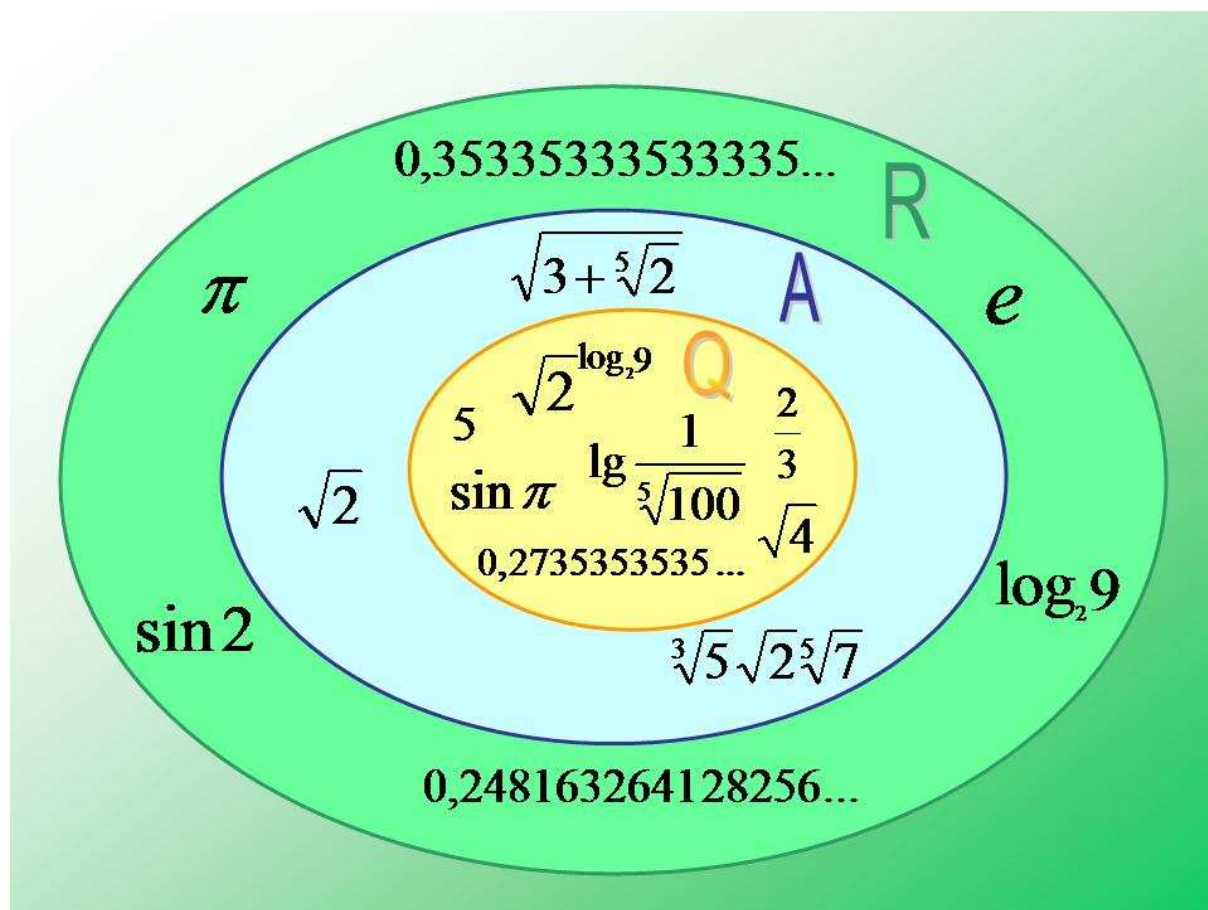
Liouville 1851-ben bizonyította, hogy az

$$\frac{1}{10^{0!}} + \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \dots$$

Végtelen mértani sor összege transzcendens szám.

Összegzésül tekintsük át egy bemutató segítségével a megismert számhalmazokat, most már az algebrai számok halmazának figyelembe vételével!

Lásd a mellékelt Power Point bemutatót!



A trigonometrikus, exponenciális és logaritmus függvényeket transzcendens függvényeknek nevezik, mert bizonyítható, hogy egyikük sem halad keresztül egynél több „algebrai ponton”, azaz olyan ponton, melynek mindkét koordinátája algebrai. Ezek az algebrai pontok valamelyik koordináta tengelyen vannak.

9. Feladat: Add meg a $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, 2^x , 10^x , $\log_2 x$, $\lg x$ függvények algebrai pontjait!

III. A π és az e szám

A π története, jelentősége

1739-ben javasolta **Euler**, hogy a kör kerületének és átmérőjének arányát a π betűvel jelöljük. A π története azonban sokkal korábban kezdődött. Az egyiptomi Rhind-papiruszon (ie. 2000-1700) a kör területét a $t = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ képlet találha-

tó, ahol d a kör átmérőjét jelöli. Eszerint $\pi = \frac{256}{81} \approx 3,1605$. Ugyanekkor Mezopotámiában a $\pi=3$ vagy a $\pi=3,125$ jóval durvább értékeket használták. Az indiai „Szulvaszusztrák” kb. ie. 500-ból π értékére két érdekes kifejezést adtak. Ezek a

$\pi = 18 \cdot (3 - 2\sqrt{2})$ és a $\pi \approx 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2$.

Más indiai művekben π -t $\sqrt{10}$ -nek vették.

A görög **Arkhimédész** (ie. 287-212) KÖRMÉRÉS című művében a kör kerületét a körbe írt és a kör köré írt szabályos sokszögek kerületével közelítette meg.

A számítást a 96 oldalú szabályos sokszögre elvégezve azt találta, hogy

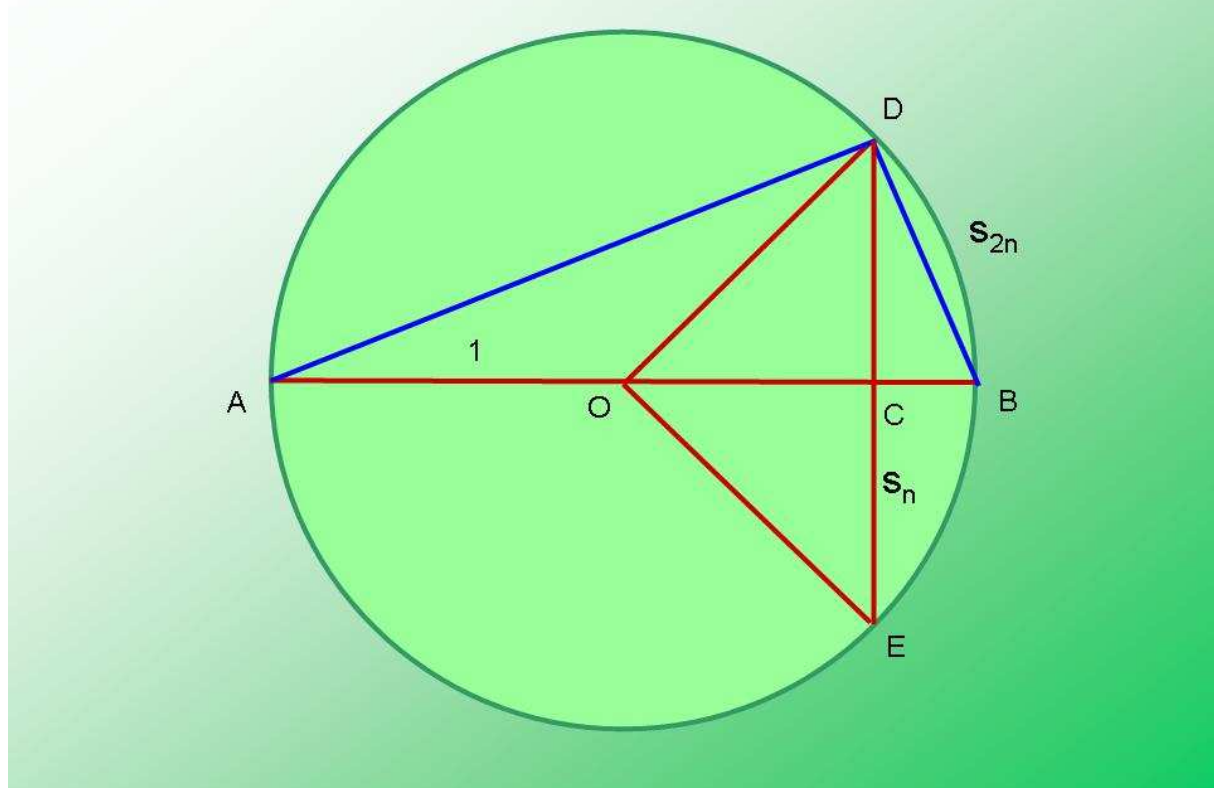
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

A III. században élt kínai **Huj** a kör kerületét a körbe írt 3072 oldalú szabályos sokszöggel közelítette meg, és így a $\pi=3,14159$ értéket kapta.

Mintapélda: Az egységsugarú kör kerületét a körbe írt 2^n ($n=2, 3, 4, 5, \dots$) oldalú szabályos sokszöggel közelítjük.

Megoldás:

A kör kerületének közelítése



Jelölje s_n a körbe írt szabályos n -szög oldalhosszúságát.

Az ábra szerint $d_{A,B}=2$, $s_n = d_{D,E}$, $d_{D,E}=2 d_{C,D}$, $s_{2n}=d_{D,B}$

Az ABC derékszögű háromszög területe

$$t = \frac{d_{A,D} \cdot d_{B,D}}{2} = \frac{d_{A,B} \cdot d_{C,D}}{2},$$

azaz

$$d_{A,D}^2 \cdot d_{B,D}^2 = d_{A,B}^2 \cdot d_{C,D}^2.$$

Mivel Pithagorasz tétele szerint $d_{A,D}^2 = d_{A,B}^2 - d_{B,D}^2$, azt kapjuk, hogy

$$(4 - d_{B,D}^2) \cdot d_{B,D}^2 = 4 \cdot \frac{d_{D,E}^2}{4},$$

azaz

$$(4 - s_{2n}^2) \cdot s_{2n}^2 = s_n^2.$$

Ezt az egyenletet megoldva, a geometriai feltételeknek megfelelő megoldás:

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Mivel tudjuk, hogy

$$s_4 = \sqrt{2}, \text{ ezért } s_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots,$$

$$s_{2^n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}},$$

n-1 db egymásba skatulyázott négyzetgyökkel.

Ezek szerint a körbe írt 2^n oldalú szabályos sokszög kerülete $2^n \cdot s_{2^n}$,

azaz az egységsugarú kör kerületét megközelíthetjük a

$$k = 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}$$

értékkel, mely n-1 db egymásba skatulyázott négyzetgyököt tartalmaz.

Ez a kifejezés tehát 2π közelítő értékét adja meg.

A XVI. Században **Ludolph** 35 tizedes jegyig számította ki π értékét, ezért a π -t szokás Ludolph-féle számnak is nevezni.

A π értéke 35 tizedes jegyig:

3,1415926535 8979323846 2643383279 50288

A XVII. században **Leibniz** egy végtelen sor segítségével adta meg $\frac{\pi}{4}$ értékét:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

Azóta is ez a π legegyszerűbb és legszebb kifejezése.

Lambert 1761-ben igazolta, hogy a π irracionális, majd **Lindemann** 1882-ben igazolta a π transzcendenciáját is.

Az e szám

1748-ban vezette be Euler az e számot, a matematika egyik legfontosabb számát. Azonban ennél jóval korábban, **Napier** logaritmusról írt művében jelentek meg az első utalások az e számra 1618-ban.

Népszerűségére jellemző, hogy vicc is született róla:

Rettegve rohannak a függvények az utcán, szinte fellökik egymást:

- Gyertek függvények, fusson, ki merre lát!

Az egyik nyugodtan szivarozva sétálgat tovább. A $\cos x$ majdnem keresztülesik rajta rohanás közben és ráförmed:

- Te süket vagy? Miért nem futsz? Nyakunkon a mindent lederiváló rém!

- Na és? - sétál tovább nyugodtan a függvény: én az **e ad x** vagyok.

Ki nem érti a vicc poénját? Ő nézzon utána az e^x függvény differenciálhányadosának! 😊

Az e szám definíciói:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Harminc tizedes jegyre:

$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 35\dots$

Az e szám a természetes alapú logaritmus alapszáma és az e^x függvény különleges jelentőségét az adja, hogy a deriváltja önmaga.

1873-ban **Hermite** bizonyította be először, hogy az e szám transzcendens.

Gyűjtőmunka: Keress érdekességeket a könyvtárban vagy az interneten a π és az e számok történetével kapcsolatban, keress π -verseket!

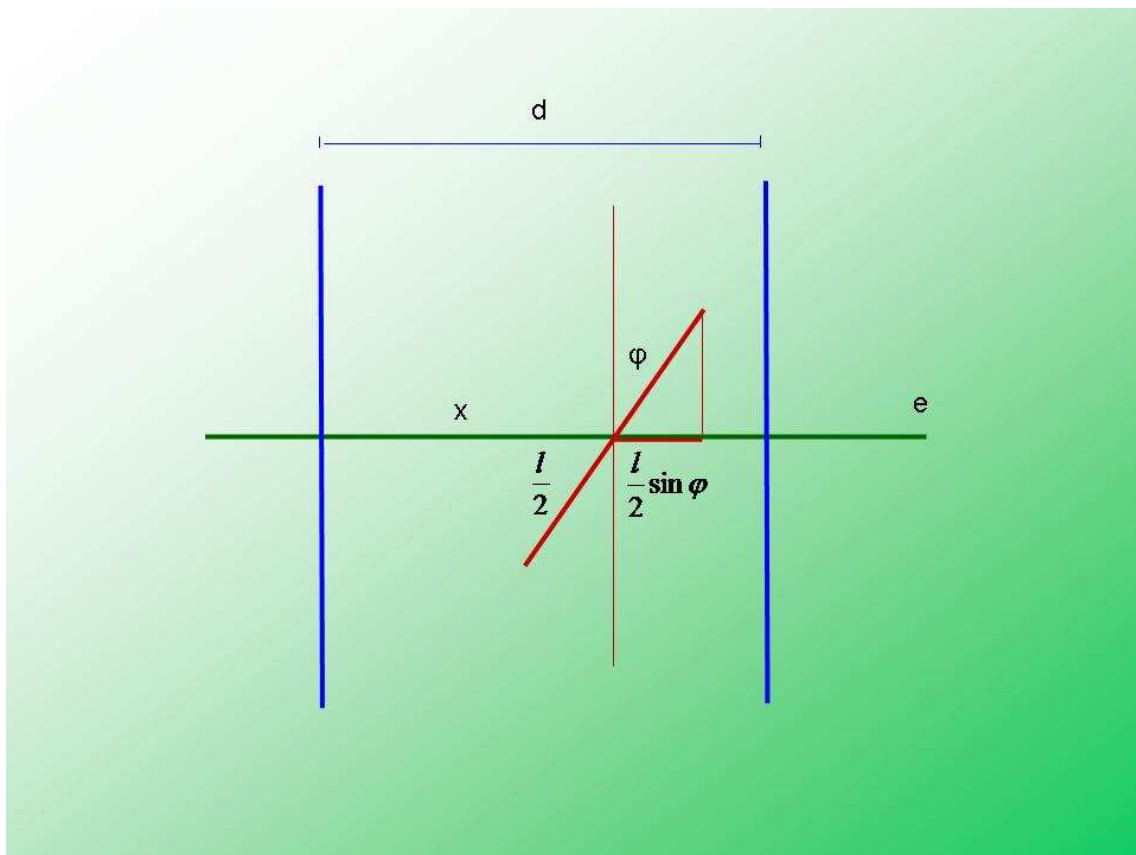
IV. A Buffon-féle tűprobléma, a kör négyszögesítése

A Buffon-féle tűprobléma

1777-ben **Buffon** vetette fel a „tűprobléma” néven közismertté vált feladatot. Ennek megoldásával nagyon érdekes lehetőséget adott a π kísérleti meghatározására. A feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

Rajzoljunk egy vízszintes lapra azonos d távolságban levő párhuzamos egyeneseket. Dobjunk erre a lapra véletlenszerűen, irányítás nélkül egy $l < d$ hosszúságú tűt. Mi a valószínűsége annak, hogy a tű metszi valamelyik egyenest?

Feltehetjük, hogy a tű középpontja egy a párhuzamos egyenesekre merőleges e egyenesre esik.



A tű helyzetét ekkor a metszés szempontjából egyértelműen jellemzik az ábrán jelölt φ és x adatok, melyekre

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$0 \leq x \leq d$$

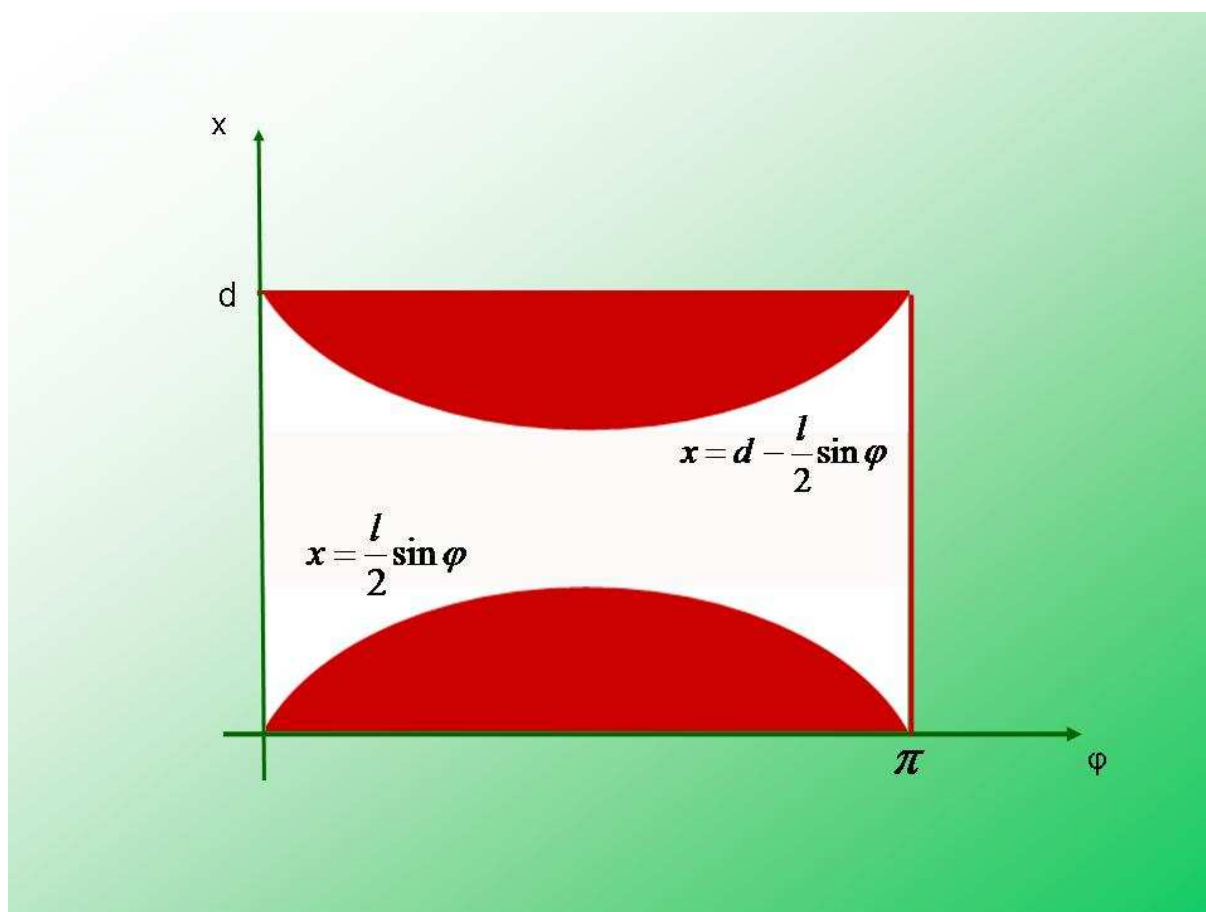
Könnyen látható, hogy a tű akkor metszi valamelyik egyenest, ha

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi$$

vagy

$$d - \frac{l}{2} \sin \varphi \leq x \leq d$$

Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az egyenlőtlenségek által meghatározott pontthalmazokat:



A geometriai valószínűséget a kedvező terület és az összes terület hányadosaként kapjuk meg, tehát annak a valószínűsége, hogy a tű metszi valamelyik rácsvonalat:

$$P = \frac{2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi}{\pi \cdot d} = \frac{l \cdot [-\cos \varphi]_0^\pi}{\pi \cdot d} = \frac{l \cdot (1+1)}{\pi \cdot d} = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot d}$$

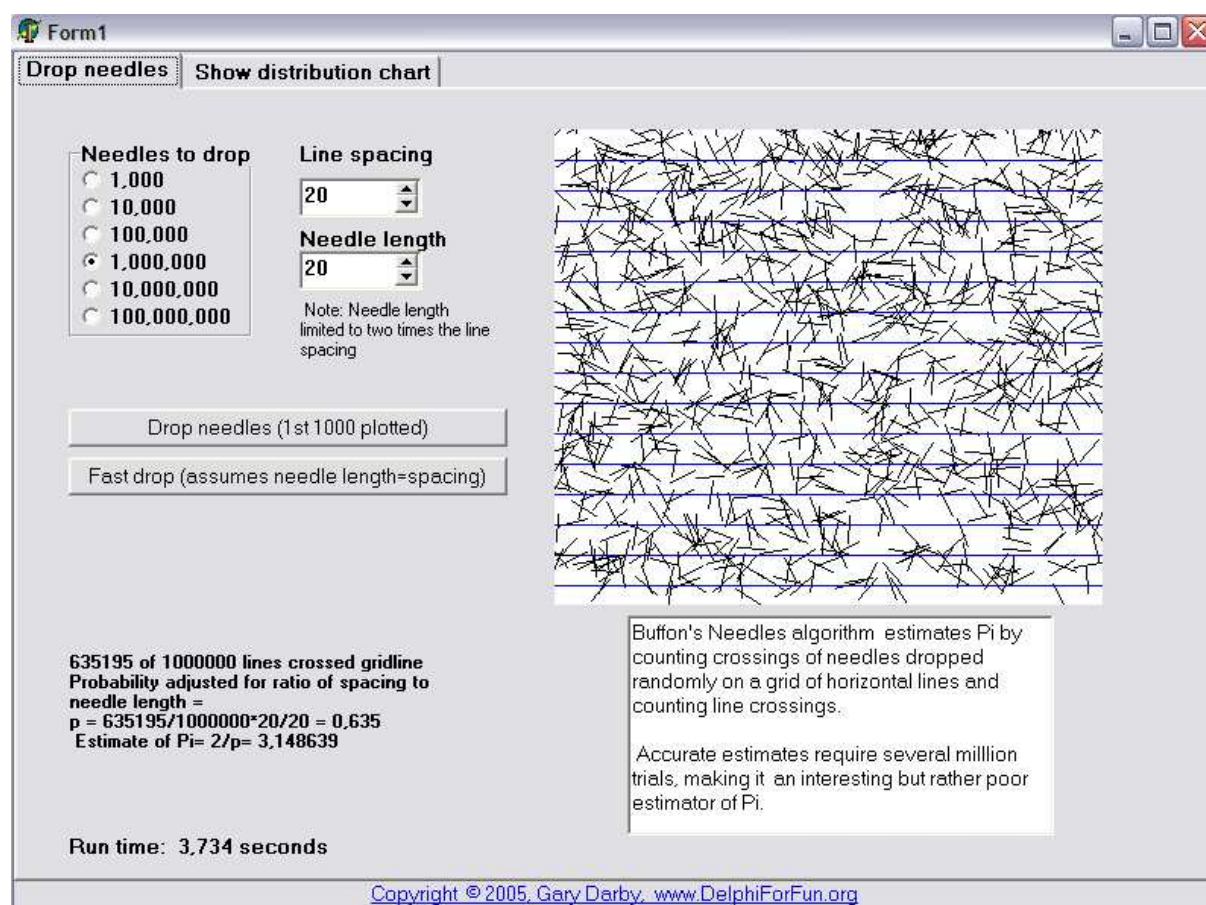
Innen kifejezhetjük a π közelítő értékét:

$$\pi = \frac{2 \cdot l}{d \cdot P} \approx \frac{2 \cdot l}{d \cdot \nu_n}$$

ahol ν_n a relatív gyakorisága annak, hogy n dobás esetén a tű metszi valamelyik rácsvonalat. 1850-ben **Wolf** végezte el először a kísérletet, és 5000 dobás után π értékére 3,1596-ot kapott.

A *BuffonsNeedles.exe* szimulációs programmal nekünk is lehetőségünk van rá, hogy kísérleti úton meghatározzuk π értékét sokkal több véletlen dobás, és jóval kényelmesebb körülmények között.

Egy kép a szimulációs programból:



A kör négyszögesítése

A matematika történetének évezredekén át az egyik legnépszerűbb feladata volt a kör négyszögesítése, azaz olyan négyzet szerkesztése euklidészi szerkesztéssel, azaz csupán egyenes vonalzó és körző segítségével, amelynek területe egy adott r sugarú kör $r^2\pi$ területével egyenlő.

Az euklidészi szerkesztés fogalma

Nézzük meg először, mit is kell értenünk pontosan euklidészi szerkesztésen!

A vonalzót két adott ponton átmenő egyenes meghúzására, a körzőt pedig adott középpontú és adott sugarú kör megrajzolására használhatjuk.

Definíció: Alapszerkesztéseknek nevezzük

- a) két egyenes metszéspontjának meghatározását
- b) egyenes és kör metszéspontjának meghatározását
- c) Két kör metszéspontjának meghatározását.

Az alapszerkesztések véges számú ismétlésével végrehajtható szerkesztéseket euklidészi szerkesztéseknek nevezzük.

10. Feladat: Egy adott egységszakasz, továbbá az a és b szakaszok ismeretében szerkesszük meg euklidészi módon az

$$a+b, a-b, a \cdot b, \frac{a}{b} \ (b \neq 0) \text{ és } \sqrt{a}$$

hosszúságú szakaszokat!

Ennek alapján az egységszakasz ismeretében meg tudjuk szerkeszteni euklidészi módon bármelyik racionális számot a számegyenesen, ezen kívül pedig azokat a számokat, melyek racionális számok, alpműveletek és négyzetgyökvonás segítségével véges számú lépésben előállíthatók. Nem szerkeszthetők meg viszont a transzcendens számok, melyek nem állíthatók elő ilyen módon.

A kör négyszögesítésének lehetetlensége

Adott az r sugarú kör, ennek területe $r^2\pi$, a vele azonos területű négyzet oldala

$$r \cdot \sqrt{\pi}.$$

Mivel a π transzcendens szám, ez nem szerkeszthető meg euklidészi módon, ezzel eldőlt, hogy a kör négyszögesítése lehetetlen feladat.

Hilbert 7. problémája

Végül egy érdekesség. **Hilbert** 1900-ban a párizsi matematikai kongresszuson tartott híres előadásában 23 egyszerűen megfogalmazható matematikai problémát vetett fel, melyek megoldatlanok voltak, és az akkori matematikai technika számára nem is látszottak egyhamar megoldhatónak. Az egyik legreménytelenebbnek tűnő probléma annak a bizonyítása volt, hogy a $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám. Három évtizeden át a leghalványabb remény sem mutatkozott arra, hogy valamilyen irányból meg lehetne közelíteni a problémát. Végül 1934-ben **Gelfond**, majd 1935-ben **Schneider** egymástól függetlenül igazolták a következő tételt:

Gelfond-Schneider tétel: Ha a 0-tól és 1-től különböző algebrai szám, és b nem racionális algebrai szám, akkor a^b transzcendens szám.

A Gelfond-Schneider tételből rögtön következik, hogy a $2^{\sqrt{2}}$ transzcendens szám.

Megjegyzés: Az Euler-féle

$$e^{i \cdot \pi} = -1$$

azonosságból, ahol i az imaginárius egység: $i = \sqrt{-1}$,

$$(e^{i \cdot \pi})^{-i} = (-1)^{-i}$$

$$e^{\pi} = (-1)^{-i}$$

Ez pedig a Gelfond-Schneider tétel szerint azt jelenti, hogy e^{π} transzcendens.